ВІДПОВІДІ
другого етапу Всеукраїнської олімпіади
Національного університету харчових технологій
з МАТЕМАТИКИ
2020

Кожне з завдань учасник повинен завершити словом «Відповідь» і записати відповідь, яку він отримав.

Завдання 1–3 мають по чотири варіанти відповіді (А–Г), з яких тільки ОДНА – ПРАВИЛЬНА. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо у полі «Відповідь» відповідного завдання записана тільки одна буква, якою позначена правильна відповідь. За кожну правильну відповідь на завдання 1–3 учасник отримує по 5 балів.

1. Вказати формулу площі трикутника.

А) $S = 2\pi R$; Б) $S = \frac{1}{2} a h$; В) $S = \pi R^2$; Г) $S = a^2$.

Відповідь: **Б.**

2. Розв'язати нерівність $9x + 2 \geq 8x + 1$.

А) $x \geq \frac{1}{17}$; Б) $x \geq 1$; В) $x \leq -1$; Г) $x \geq -1$.

Відповідь: **Г.**

3. Обчислити без калькулятора $2^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - 7{,}5$.

А) 21,5; Б) 1,5; В) 8; Г) 3,5.

Відповідь: А.

Завдання 4–10 повинні містити ПОВНЕ розв'язання задачі, яке підтверджує правильну відповідь. Завдання вважається розв'язаним і оцінюється вказаними для нього балами, якщо наведено повне правильне розв'язання, і записана правильна відповідь За кожне правильне розв'язання завдання 4–7 учасник отримує по 10 балів, за завдання 8–10 отримує по 15 балів.

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-5} = 2$.

Розв'язання.

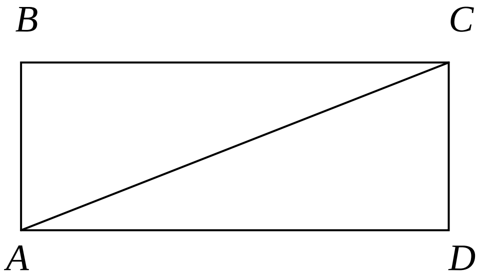
Оскільки права частина рівняння невід'ємна, піднесемо до квадрату обидві частини рівняння. Маємо

$$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 = 2^2,$$
$$x - 5 = 4,$$
$$x = 9.$$

Відповідь: 9 **.**

5. Знайти площу прямокутника, якщо його одна сторона дорівнює 3, а діагональ 5.

Розв'язання.



За умови $AB = 3$ од., $AC = 5$ од.. Оскільки $ABCD$ прямокутник, то ABC прямокутний трикутник. За теоремою Піфгора маємо:

$AB^2 + BC^2 = AC^2$. Звідки $BC^2 = AC^2 - AB^2$.

$BC^2 = 5^2 - 3^2 = 16,$ тоді $BC = 4$ од.

Знайдемо площу прямокутника за формулою: $S = AB \cdot BC,$ маємо $S = 12$ од^2.

Відповідь: 12 од^2.

6. Спросити вираз $(a+3)^2 - a^2 - 6a - 4$.

Розв'язання.

$(a+3)^2 - a^2 - 6a - 4 = a^2 + 6a + 9 - a^2 - 6a - 4 = 5.$

Відповідь: 5.

7. Розв'язати нерівність $\log_3(4x-5) \geq \log_3(2x+4)$.

Розв'язання.

Відомо, що при $a > 1$ нерівність $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ рівносильна системі:

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Отже, маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 4x - 5 \geq 2x + 4; \\ 2x + 4 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 9; \\ 2x > -4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4{,}5; \\ x > -2; \end{cases} \Rightarrow \quad x \geq 4{,}5.$$

***Відповідь*:** $x \in [4{,}5; +\infty)$.

8. Дано функцію $f(x) = x^4 + \cos 2x$. Знайти $f'(0)$.

Розв'язання.

Знайдемо похідну заданої функції. Відомо, що $(u+v)' = u' + v'$, тоді

$$f'(x) = \left(x^4 + \cos 2x\right)' = \left(x^4\right)' + (\cos 2x)' = 4x^3 - 2\sin 2x.$$

Тут ми скористалися правилом диференціювання складеної функції.

Знайдемо значення похідної функції при $x = 0,$ маємо:

$$f'(0) = 4 \cdot 0^3 - 2\sin 0 = 0.$$

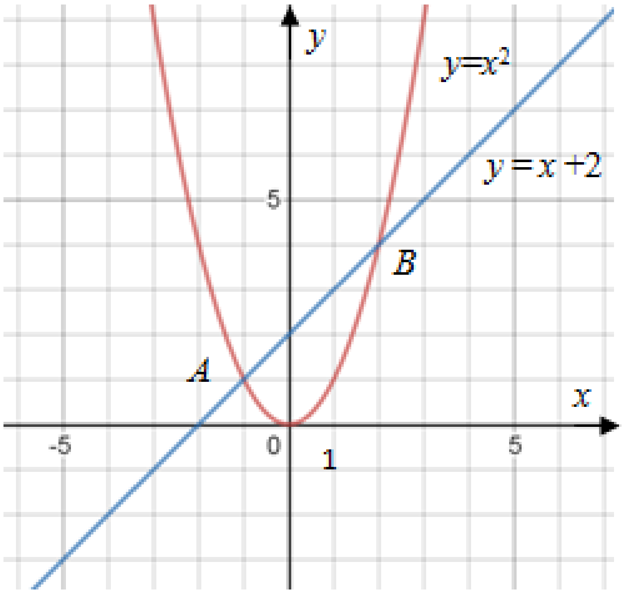
Відповідь: 0.

9. Побудувати графіки функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$. На рисунку позначити точки перетину графіків функцій. У відповіді вказати координати точок перетину графіків функцій.

Розв'язання.

Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$. Відомо, що $y = x^2$ - квадратична функція, графіком якої є парабола з вершиною в точці (0;0);

$y = x + 2$ - лінійна функція, графіком якої є пряма, що проходить через точки $(0;2)$ та $(1;3)$.



З рисунка маємо координати точок перетину графіків: $A(-1;1)$ та $B(2;4)$.
Відповідь: $(-1;1)$ та $(2;4)$.

10. Розв'язати рівняння $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

Розв'язання.

Позначимо $2^x = t,\ \ t \ge 0$, тоді $2^{2x} = \left(2^x\right)^2 = t^2$. Тоді рівняння набуває вигляду:

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3; \\ t_1 \cdot t_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2; \\ t_2 = 1. \end{array} \right.$$

Повернемося до змінної x, маємо:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 2; \\ 2^x = 1; \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 2^1; \\ 2^x = 2^0; \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = 0. \end{array} \right.$$

Відповідь: 0; 1.

Голова предметно-методичної комісії
Всеукраїнської олімпіади НУХТ з математики Ніколаєва О.А.